

Correction Baccalauréat S - Spécialité Centres Étrangers - 12 Juin 2013

www.math93.com

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1.

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Quelle est la durée moyenne d'une vanne ?

La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$, donc la durée de vie moyenne est :

$$E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} = 5000 \text{ heures.}$$

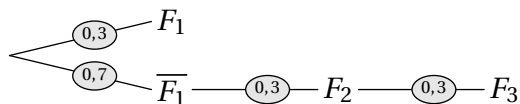
2. Calculer $P(T > 6000)$.

La variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$, donc

$$P(T > 6000) = e^{-6000\lambda} = e^{-1,2}$$

Partie B

1. Arbre des probabilités.



2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.

On a :

$$P(E) = P(F_1) + P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3)$$

$$P(E) = 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,3$$

$$P(E) = 0,363 = 36,3\%$$

3. Calculons la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche, sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures.

On cherche donc à calculer $P_E(F_1)$ soit :

$$P_E(F_1) = \frac{P(E \cap F_1)}{P(E)}$$

$$P_E(F_1) = \frac{P(F_1)}{P(E)} = \frac{0,3}{0,363}$$

$$P_E(F_1) \approx 0,826 \text{ soit environ } 82,6\%.$$

Partie C L'industriel affirme que seulement 2% des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I , au seuil de 95 % de la variable F .

On a $n = 400$, $p = 2\%$ alors on sait que puisque $n = 400 \geq 30$, $np = 8 \geq 5$ et $n(1-p) = 392 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F est :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

soit

$$I = \left[0,02 - 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{400}} ; 0,02 + 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{400}} \right]$$

Et donc $I \approx [0,628\% ; 3,375\%]$.

2. Test.

On choisit 400 vanes au hasard dans la production, tirage assimilé à un tirage aléatoire avec remise. Parmi ces 400 vanes, 10 sont défectueuses soit une proportion de $p = \frac{10}{400} = 2,5\%$.

On a bien $p = 2,5\% \in I \approx [0,628\% ; 3,375\%]$, donc on ne peut pas remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel.

Partie D

La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $m = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminons $P(760 \leq D \leq 840)$.

La calculatrice nous donne $P(760 \leq D \leq 840) \approx 68,3\%$, arrondi au millième.

2. Déterminons $P(D \leq 880)$.

La variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $m = 800$, et d'écart-type $\sigma = 40$, représente la demande mensuelle, de ce fait D est positive et :

$$P(D \leq 880) = P(0 \leq D \leq 880)$$

$$P(D \leq 880) \approx 0,9772499$$

$$P(D \leq 880) \approx 97,7\%$$
, arrondi au millième.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock de 880 vanes, il n'aura pas plus de 1% de chances d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

Le fait d'être en rupture de stock signifie que la demande D est supérieure strictement au stock de 880, on cherche donc $P(D > 880)$ soit :

$$P(D > 880) = 1 - P(\leq D \leq 880)$$

$$P(D > 880) \approx 1 - 0,977$$

$$P(D > 880) \approx 0,023$$

$$P(D > 880) \approx 2,3\% > 1\%$$
, donc l'industriel a tort.

Exercice 2.

4 points

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère :

- Les points A(12 ; 0 ; 0), B(0 ; -15 ; 0), C(0 ; 0 ; 20), D(2 ; 7 ; -6), E(7 ; 3 ; -3) ;
- le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$.

Affirmation 1 : FAUSSE

Une équation cartésienne du plan parallèle au plan \mathcal{P} et passant par le point A est : $2x + y + 2z - 24 = 0$.

Le plan parallèle au plan \mathcal{P} est de vecteur normal, par exemple, $\vec{n}_{\mathcal{P}}(2 ; 1 ; -2)$.

Sachant de plus qu'il passe par le point A(12 ; 0 ; 0), son équation est :

$$2(x - 12) + (y - 0) - 2(z - 0) - 24 = 0, \text{ soit } \boxed{2x + y - 2z - 24 = 0}.$$

L'affirmation est FAUSSE.

Affirmation 2 : VRAIE

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : (AC) :
$$\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Une solution simple est de vérifier que les coordonnées des point A et C vérifient bien ces équations.

- Pour A(12 ; 0 ; 0), on a bien en prenant $t = -1$,
$$\begin{cases} x = 9 - 3t = 12 \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t = 0 \end{cases};$$
- Pour C(0 ; 0 ; 20), on a bien en prenant $t = 3$,
$$\begin{cases} x = 9 - 3t = 0 \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t = 20 \end{cases}.$$

Les point A et C appartiennent donc bien à la droite dont l'équation est donnée, cette droite est bien la droite (AC).

Affirmation 3 : FAUSSE

La droite (DE) et le plan \mathcal{P} ont au moins un point commun.

La droite (DE) et le plan \mathcal{P} ont au moins un point commun, si :

- soit (DE) est sécante au plan \mathcal{P} , dans ce cas, ils ont 1 seul point commun ;
- soit (DE) est incluse dans le plan \mathcal{P} , dans ce cas ils en ont une infinité.

Le seul cas à exclure est donc le cas où la droite (DE) est parallèle, non incluse dans le plan \mathcal{P} .

- Un vecteur directeur de la droite (DE) est $\vec{DE}(5 ; -4 ; 3)$;
- Le plan \mathcal{P} est de vecteur normal, par exemple, $\vec{n}_{\mathcal{P}}(2 ; 1 ; -2)$.
- Or $\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{DE} = 2 \times 5 + 1 \times (-4) + (-2) \times 3 = 0$ donc un vecteur directeur de la droite (DE) est orthogonal à un vecteur normal du plan \mathcal{P} . La droite (DE) est donc parallèle au plan \mathcal{P} .
Elle n'est pas incluse dans le plan \mathcal{P} car par exemple D(2 ; 7 ; -6) n'appartient pas à \mathcal{P} : $2x + y - 2z - 5 = 0$, puisque $2 \times 2 + 7 - 2 \times (-6) - 5 = 18 \neq 0$

Affirmation 4 : VRAIE

La droite (DE) est orthogonal au plan (ABC).

On va montrer pour cela qu'un vecteur directeur de (DE) est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

- Un vecteur directeur de la droite (DE) est $\vec{DE}(5 ; -4 ; 3)$;
- Pour le plan (ABC) :
Les vecteurs $\vec{AB}(-12 ; -15 ; 0)$ et $\vec{AC}(-12 ; 0 ; 20)$ sont deux vecteurs non colinéaires, du plan (ABC) ;
- Or \vec{DE} est orthogonal à ces deux vecteurs car les produit scalaires avec \vec{AB} et \vec{AC} sont nuls :
 - D'une part : $\vec{DE} \cdot \vec{AB} = 5 \times (-12) - 4 \times (-15) + 3 \times 0 = 0$;
 - D'autre part : $\vec{DE} \cdot \vec{AC} = 5 \times (-12) - 4 \times 0 + 3 \times 20 = 0$

Le vecteur \vec{DE} est donc bien orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) de base du plan (ABC), ce qui prouve que (DE) est orthogonal au plan (ABC).

Exercice 3.

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$.

On note :

- \mathcal{A}_1 l'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$;
- \mathcal{A}_2 l'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
- La fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = 1 + e^{-x}$.

On admet que : $\forall x \in [0; 1], g(x) \geq 0$.

1. Les aires sont exprimées en unités d'aire.

a. **Démontrer que** $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.La fonction G , définie par $G(x) = x - e^{-x}$ est clairement une primitive de g puisque $G'(x) = g(x)$.

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x) dx = [G(x)]_0^a = [x - e^{-x}]_0^a$$

$$\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} - (0 - e^{-0})$$

$$\text{On a donc } \boxed{\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1}$$

b. **Exprimons** \mathcal{A}_2 **en fonction de** a .

On a

$$\mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x) dx = [G(x)]_a^1 = [x - e^{-x}]_a^1$$

$$\mathcal{A}_2 = 1 - e^{-1} - (a - e^{-a}) =$$

$$\text{On a donc } \boxed{\mathcal{A}_2 = 1 - a - e^{-1} + e^{-a}}$$

Soit f la fonction définie pour tout réel x sur $[0; 1]$ par : $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$.a. **Dresser le tableau de variation de** f **sur** $[0; 1]$.La fonction f est définie sur $[0; 1]$ et dérivable comme somme de fonctions qui le sont. $\forall x \in [0; 1]$, on a $f'(x) = 2 + 2e^{-x} > 0$.La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 1]$.

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	$f(0) = -2 + \frac{1}{e} \approx -1,6$	$f(1) = -2 - \frac{1}{e} \approx 1,6$

b. **Démontrer que la fonction** f **s'annule une fois et une seule sur l'intervalle** $[0; 1]$ **en un réel** α . **Donner la valeur de** α **au centième.**- La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; 1]$;- Le réel $k = 0$ est compris entre $f(0) = -2 + \frac{1}{e} \approx -1,6$ et $f(1) = -2 - \frac{1}{e} \approx 1,6$.Donc, d'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = k = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0; 1]$.Pour avoir un encadrement de α , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

$$\text{Avec un pas de } 0,1 \text{ on obtient : } \begin{cases} f(0,4) \approx -0,17276 \\ f(0,5) \approx 0,1548 \end{cases}, \text{ donc } 0,4 \leq \alpha \leq 0,5.$$

$$\text{Avec un pas de } 0,01 \text{ on obtient : } \begin{cases} f(0,45) \approx -0,0074 \\ f(0,46) \approx 0,02531 \end{cases}, \text{ donc } \boxed{0,45 \leq \alpha \leq 0,46}.$$

2. Déterminons alors une approximation du réel a pour lequel les deux aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont égales.

On a :

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff a - e^{-a} + 1 = 1 - a - e^{-1} + e^{-a}$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff 2a - 2e^{-a} + \frac{1}{e} = 0$$

$$\boxed{\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff f(a) = 0}$$

Donc d'après la question précédente, un encadrement du réel a pour lequel les deux aires \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont égales est : $\boxed{0,45 \leq a \leq 0,46}$, et donc **une approximation au centième par défaut de a est 0,45.**

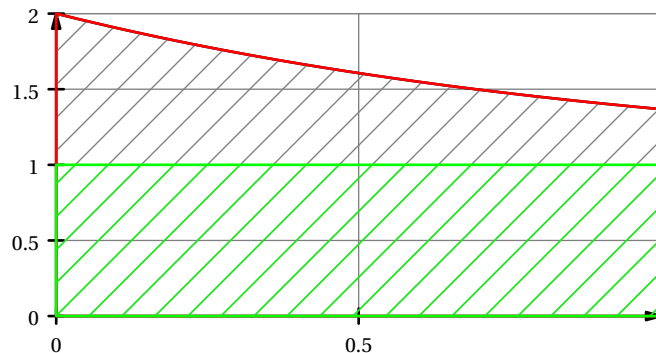
Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine \mathcal{D} en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'égalité par un argument graphique $b < 1 + \frac{1}{e}$.

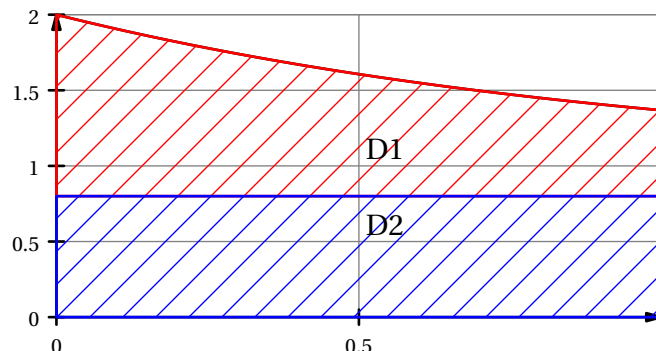
- Graphiquement, l'aire \mathcal{A} est strictement inférieure à l'aire du rectangle de côtés 1 et 2 soit à 2 unités d'aire.
- De plus, l'aire du rectangle de côté 1 et $g(1)$ est clairement supérieure à 1, en effet $1 \times g(1) = 1 + \frac{1}{e} > 1$;
- De ce fait il est nécessaire que $b < g(1)$ sinon la portion de \mathcal{D} au dessous de la droite d'équation $y = b$ est supérieure 1 ;
- Cela qui est impossible si on veut que cette droite partage le domaine \mathcal{D} , d'aire inférieure à 2, en deux parties de même aire.



On a donc montré que $\boxed{b < 1 + \frac{1}{e}}$.

2. Déterminer la valeur exacte de b .

On cherche b qui permet de partager le domaine \mathcal{D} en deux domaines \mathcal{D}_1 , et \mathcal{D}_2 de même aire, l'un, \mathcal{D}_1 situé au dessus de la droite d'équation $y = b$, l'autre, \mathcal{D}_2 , au dessous.



D'après la question précédente, le domaine \mathcal{D}_2 est un rectangle de côtés 1 et b , donc d'aire $\text{Aire}(\mathcal{D}_2) = b$. De plus l'aire de ce rectangle doit être égale à la moitié de l'aire du domaine \mathcal{D} . Donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\mathcal{D}_2) &= \frac{1}{2}\text{Aire}(\mathcal{D}) \\ b &= \frac{1}{2} \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} [G(x)]_0^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{2} [x - e^{-x}]_0^1 \\ b &= \frac{1}{2} (1 - e^{-1} + e^0)\end{aligned}$$

Et donc $b = \frac{1}{2}(2 - e^{-1})$.

Exercice 4.**5 points****candidats ayant choisi la spécialité mathématique****Partie A : Algorithmique et conjectures****1. Cet algorithme comporte des oublis. Repérer ces oublis et corriger-les.**

Il faut modifier l'algorithme de la sorte :

Initialisation :	Lire n Affecter à a la valeur 20 Affecter à b la valeur 10 Affecter à i la valeur 2013
Traitement :	Tant que $i < n$ faire Affecter à i la valeur $i + 1$ Afficher i Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$ Afficher c Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7b)$ Afficher b Affecter à a la valeur c Fin de tant que
Sortie :	

2. On donne une copie d'écran de l'algorithme corrigé avec $n = 2020$. Émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n) .

Avec les données affichées :

- La suite (a_n) semble être décroissante et convergent vers 18;
- La suite (b_n) semble être croissante et convergent vers 12.

Partie B : Étude mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 à préciser.

Pour tout entier naturel n ,

- a_n est le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A au début de l'année $(2013 + n)$.
- b_n est le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île B au début de l'année $(2013 + n)$.

Or d'après les données, on retrouve au début de chaque année :

- **Sur l'île A** : 80% des oiseaux de l'île A au début de l'année précédente et 30% des oiseaux de l'île B
soit : $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n$;
- **Sur l'île B** : 20% des oiseaux de l'île A au début de l'année précédente et 70% des oiseaux de l'île B
soit : $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n$;

Et donc en prenant $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ on a

$$MU_n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,3b_n \\ 0,2a_n + 0,7b_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$.

On admet alors que, pour tout entier naturel n , $n \geq 1$, $U_n = M^n U_0$.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que pour tout entier naturel n ,

$$(P_n) : n \geq 1, \quad M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

Initialisation : $M^1 = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^1 & 0,6 - 0,6 \times 0,5^1 \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^1 & 0,4 + 0,6 \times 0,5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = M$

Donc la propriété (P_n) est vérifiée au rang $n = 1$

Hérédité : Supposons que pour n fixé, la propriété (P_n) soit vraie, alors

$$M^{n+1} = M \times M^n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,8 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 0,3 \times (0,4 - 0,4 \times 0,5^n) & 0,8 \times (0,6 - 0,6 \times 0,5^n) + 0,3(0,4 + 0,6 \times 0,5^n) \\ 0,2 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 0,7 \times (0,4 - 0,4 \times 0,5^n) & 0,2(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) + 0,7(0,4 + 0,6 \times 0,5^n) \end{pmatrix}$$

Le premier coefficient de la matrice est alors

$$0,8 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 0,3 \times (0,4 - 0,4 \times 0,5^n)$$

$$= 0,48 + 0,32 \times 0,5^n + 0,12 - 0,12 \times 0,5^n$$

$$= 0,6 + \underbrace{0,2}_{0,2} \times 0,5^n$$

$$= 0,6 + (0,4 \times 0,5) \times 0,5^n$$

$$\boxed{= 0,6 + 0,4 \times 0,5^{n+1}}$$

On obtient alors :

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^{n+1} & 0,6 - 0,6 \times 0,5^{n+1} \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^{n+1} & 0,4 + 0,6 \times 0,5^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété (P_n) est vraie au rang $n = 1$ et, si on la suppose vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$.

La propriété est donc vraie pour tout entier n , $n \geq 1$.

3. Exprimer a_n en fonction de n , pour tout entier n , $n \geq 1$.

Puisque l'on admet que, pour tout entier naturel n , $n \geq 1$, $U_n = M^n U_0$, on a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \text{ avec } a_0 = 20 \text{ et } b_0 = 10$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10 \times (0,6 - 0,6 \times 0,5^n) \\ 20 \times (0,4 - 0,4 \times 0,5^n) + 10 \times (0,4 + 0,6 \times 0,5^n) \end{pmatrix}$$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$a_n = 20 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10 \times (0,6 - 0,6 \times 0,5^n)$$

$$a_n = 12 + 8 \times 0,5^n + 6 - 6 \times 0,5^n$$

$$\boxed{a_n = 18 + 2 \times 0,5^n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

4. Peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ?

On a montré que : $a_n = 18 + 2 \times 0,5^n$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

On sait que si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \times 0,5^n) = 0.$$

De ce fait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 18$.

Au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser à **18 millions**.